

# PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL Y EL ENFOQUE POR COMPETENCIAS EN EL BACHILLERATO

*Luis López Acosta, Ricardo Cantoral Uriza, Gisela Montiel Espinoza*

## Resumen

En este escrito se presentan los avances de un proyecto de investigación que se enmarca en la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y dentro del paradigma de las Investigaciones basadas en el Diseño, con el que se pretende generar un marco de referencia para articular los aspectos metodológicos y didácticos relativos a la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional y el enfoque de competencias para postular lineamientos que den luz sobre posibles orientaciones para el diseño de la instrucción encaminado al logro de los objetivos planteados dentro de la RIEMS.

**Palabras clave:** Pensamiento y Lenguaje Variacional, Investigación basada en el Diseño, Enfoque por Competencias.

## Introducción

La entrada en vigor de la Reforma Integral para la Educación Media Superior (RIEMS) en México, trajo sin duda retos significativos con respecto a las prácticas educativas de su sistema pues, como en toda reforma, se promulgan filosofías y perspectivas que se pretenden sean asumidas por todos los actores involucrados en el mismo. En particular, bajo la RIEMS se considera a la educación como un proceso mediante el cual las personas adquieren conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que les permitirán desarrollarse de manera individual y social. El objetivo principal de esta es que las personas participen de manera integrada y efectiva en la construcción de su propia realidad, el encuentro de su identidad particular y la transformación social (Secretaría de Educación pública, 2008).

Para lograr sus objetivos, la RIEMS recurre al modelo educativo denominado *Enfoque por Competencias*, el cual pretende contrarrestar la visión academicista y acumulativa que permea las prácticas educativas asignando un valor prioritario a los conocimientos puestos en uso (Cabrera, 2009). En dicho modelo existen competencias asociadas a campos disciplinares (competencias disciplinares) como el de matemáticas, el cual comprende ocho competencias específicas que se espera sean desarrolladas por los estudiantes al finalizar su formación. Asimismo, entre uno de los aspectos que se consideran esenciales dentro del marco de la RIEMS, para guiar la praxis educativa, está la determinación de condiciones relacionadas con la construcción de escenarios, actividades y materiales de aprendizaje implementados por el profesor. Al respecto se menciona, entre otras condiciones, que la planeación de la intervención no puede ser arbitraria, ni fragmentada, sino más bien debe tener una estructura lógica, coherente y organizada. En este sentido las actividades propuestas por los docentes adquieren gran relevancia en el aprendizaje pues este es adquirido a través de actividades con sentido y en su interacción con los alumnos antes, durante y posterior a la actividad, donde promueve en ellos un proceso de reflexión (Secretaría de Educación pública, 2008).

No obstante lo anterior, trabajos como el de Cabrera (2009), han mostrado que la RIEMS presenta importantes carencias en cuanto a un marco didáctico metodológico que conduzca la praxis educativa. Esto es, se presentan lineamientos genéricos, como los descritos, que no expresan particularidades sobre aspectos metodológicos que permitan organizar la actividad áulica. Por ejemplo, no se especifica de qué forma se pretende que sean abordados los contenidos matemáticos expresados en planes y programas de estudio para el desarrollo de las ocho competencias disciplinares en matemáticas. Del mismo modo, no se explicitan qué tipo de lineamientos específicos orientarán la construcción de escenarios que promuevan el desarrollo de dichas competencias, a pesar de que, como se ha mencionado antes, se hace hincapié sobre su relevancia. En consecuencia, bajo estas ideas, cumplir cabalmente con lo propuesto resulta sumamente complicado.

Por otro lado, en el trabajo desarrollado por Cabrera (2009) se proporciona evidencia para considerar que los elementos metodológicos y didácticos propuestos bajo el enfoque del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) son una opción viable para el trabajo en el aula y, en consecuencia, para el desarrollo de competencias disciplinares matemáticas. En dicho trabajo se da sustento para afirmar que el desarrollo del PyLVar en el estudiante constituye un elemento formativo de gran importancia y, por tanto, una posible competencia a integrar al Marco Curricular Común de la RIEMS. Sin embargo, este mismo autor, en un trabajo posterior, señala la importancia de precisar en caracterizaciones más refinadas que permitan determinar o caracterizar la presencia y el desarrollo del PyLVar en el bachillerato, pues distingue una ausencia en la definición de etapas o estadios que permitan potenciar su desarrollo (Cabrera, 2014).

De este modo, considerando la evidencia sobre la pertinencia y potencialidad del PyLVar para el desarrollo de las competencias disciplinares en matemáticas del bachillerato, en los trabajos de Cabrera, así como una revisión sobre algunos estudios dentro de la línea de investigación PyLVar ha permitido identificar el hecho de que gran parte de ellos se han centrado en explorar, por ejemplo, las estrategias y construcciones que profesores o estudiantes ponen en juego ante situaciones variacionales (Mirón, 2000; Aparicio, 2003; Reséndiz, 2004; Díaz, 2005; Caballero, 2012); o bien, en propuestas que permitan la resignificación de nociones específicas tales como la derivada, función, integral, entre otras. (González, 1999; Testa, 2004; Dolores, 2007; Muñoz, 2010; Cabañas, 2011; Buendía, 2011). Por lo tanto, consideramos importante realizar estudios que pretendan generar propuestas para el desarrollo del PyLVar en los que se aporten elementos concretos que permitan organizar la intervención en el aula para el alcance de las competencias. Es decir, lineamientos sobre la articulación entre el tratamiento de las nociones matemáticas y las competencias, ya que, con este tipo de información el discurso del enfoque por competencias se beneficiaría significativamente pues se cubriría la ausencia de esos marcos de referencia, didácticos metodológicos señalados por Cabrera para promover las competencias.

Es por ello que en esta investigación, nos interesa la búsqueda de elementos que permitan construir un marco de referencia que permitan articular los aspectos metodológicos y didácticos relativos al PyLVar, y el enfoque de competencias para postular lineamientos que den luz sobre posibles orientaciones hacia el diseño de la instrucción para así, cubrir los objetivos planteados dentro de la RIEMS. Siguiendo esta línea, consideramos que una posible vía es realizar experimentaciones de diseños de intervención basados en los

resultados de la línea de investigación PyLVar para obtener información que nos permita ir construyendo dicho marco de referencia.

### **Socioepistemología y el Pensamiento y Lenguaje Variacional**

Debido que el enfoque por competencias busca “superar una perspectiva formativa que valora el aprendizaje de conceptos y procedimientos *per se* desde una mira enciclopedista, a una que valora el uso que se hace del conocimiento” (Cabrera, 2014, p.5), consideramos pertinente recurrir al marco socioepistemológico de la Matemática Educativa como una forma de generar tratamientos alternativos, pues este intenta centrarse en los usos de conocimiento matemático ante situaciones específicas (Cantoral, 2013). En este sentido, la Teoría Socioepistemología se interesa por provocar el tránsito del *conocimiento* al *saber* para lo cual los objetos matemáticos requieren fundamentalmente ser relacionados con el uso que les da sentido y significación.

En síntesis, diríamos desde el programa socioepistemológico que los conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual y su contenido factual, para ser objetivables, requieren del uso que le da sentido al conocimiento, de herramientas y argumentos que tipifican al usuario y a las situaciones de aprendizaje, escolares o no, pero ligadas a la vida real donde se ponga en uso el conocimiento, es decir, se constituya en saber (Cantoral, 2013, p. 145).

Asimismo, otro referente esencial en el desarrollo del trabajo es el *Pensamiento y Lenguaje Variacional*, como se ha mencionado, el cual posee un carácter ambivalente pues, por un lado, corresponde a una línea de investigación, dentro de la Socioepistemología, que se encarga de “estudiar fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social” (Cantoral, 2010, p. 8). Y por el otro, es considerado también como aquel conjunto de elementos, estrategias, técnicas y lenguajes variacionales que constituyen una forma de razonamiento que permite enfrentar o conducirse ante problemas o situaciones variacionales (Cabrera, 2014).

La articulación del PyLVar visto tanto como línea de investigación como una forma de pensamiento basado en la predicción, ha permitido obtener resultados prometedores en el aprendizaje de los contenidos relacionados con la variación y el cambio a través del diseño de situaciones de aprendizaje. En particular, un avance significativo al respecto corresponde al trabajo de Caballero (2012), en el cual se muestra una caracterización y especificación de los elementos que caracterizan la puesta en juego del PyLVar en los procesos de construcción de saberes matemáticos en situaciones variacionales (véase figura 1), resultados desconocidos al momento del trabajo de Cabrera (2009).

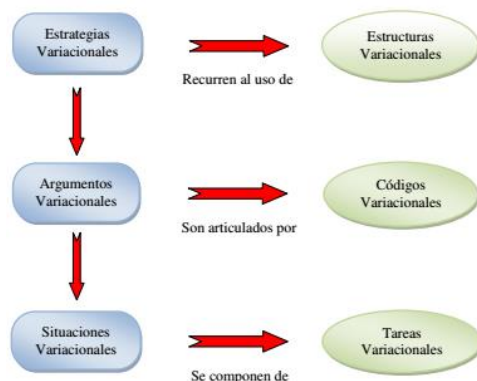


Figura 1. Modelo de interacción de elementos del PylVar (Caballero, 2012; p.39)

Entre tales elementos se encuentran las *estrategias variacionales*, *argumentos variacionales* y las *situaciones variacionales*. De estos tres elementos, las estrategias variacionales, se consideran de suma importancia pues se presume que son estas las que permiten generar el pensamiento variacional, “pues resultan ser el punto de partida para el análisis y reflexión acerca del cambio y sus efectos” (Caballero, 2012; p.39). Consisten en formas particulares de razonar y actuar ante situaciones variacionales con la finalidad de reconocer y estudiar cualitativa o cuantitativamente los cambios de las variables involucradas. Algunas de las estrategias variacionales reconocidas hasta ahora son la Comparación, la Seriación, la Estimación y la Predicción (Salinas, 2003; Caballero, 2012).

Este marco de ideas hasta el momento consideramos nos permitirá generar conjeturas importantes a considerar para el diseño de propuestas de intervención que busquen promover el desarrollo del PyLVar. Por ejemplo, se presume que las estrategias variacionales presentarán un aspecto medular para la organización de situaciones de aprendizaje.

### La investigación basada en el diseño

La investigación que nos encontramos realizando es de tipo cualitativo, pues como se ha mencionado, la intención general del estudio es obtener algunos elementos teóricos y metodológicos que permitan generar conjeturas para organizar una instrucción que promueva el desarrollo de competencias disciplinares de matemáticas en el bachillerato, a partir de la experimentación de diseños. De este modo, el objetivo es construir diseños de intervención fundamentados en las revisiones teóricas sobre el PyLVar, de modo que sean experimentados en un contexto real de aula de bachillerato para evidenciar sus alcances y limitantes en cuanto a la construcción de conocimientos ligados al enfoque por competencias.

Por lo anterior, el estudio se enmarcará dentro del paradigma de la *Investigación basada en el Diseño* (*Task Design* o *Design Research*), sobre el cual al momento nos encontramos realizando una revisión sobre las distintas metodologías que se proponen dentro de la comunidad de matemáticos educativos a nivel internacional. A continuación presentamos las primeras ideas de dicha revisión.

Hemos encontrado que en las últimas décadas la comunidad internacional de matemáticos educativos ha mostrado un creciente interés en la discusión y consideración de metodologías más robustas y fundamentadas con respecto a la investigación basada en

diseños. Algunos autores mencionan que los reportes de investigación de estudios sobre diseño de tareas rara vez proporcionan suficientes detalles sobre la lógica de las tareas y sobre aspectos que permitan a otros el empleo de las mismas (Sierpinska, 2003; en Watson y Ohtani, 2015). Es por ello que, a partir del 2008, se han estado organizando grupos temáticos de discusión en diversos espacios sobre el diseño y análisis de tareas, en los que los diseñadores exponen y demuestran el uso de sus principios respecto al diseño de tareas, (Watson y Ohtani, 2015). Todo ello con la intención de generar marcos de referencia que permitan analizar de manera fundamentada y sistemática, el papel que juega el diseño de tareas en aspectos como los procesos de enseñanza de la matemática, el diseño de actividades para libros de texto, así como en el desarrollo de los aprendizajes matemáticos dentro de una perspectiva progresiva y controlada.

Algunas perspectivas proponen la construcción y análisis de diseños de forma situada, puesto que se asume que la relación entre los procesos individuales y sociales son tan fuertes que no se les podría separar. Al respecto, Cobb (2003), considera que la investigación basada en el diseño implica tanto el desarrollo de diseños de instrucción para apoyar a determinadas formas de aprender, así como determinar metodologías para estudiar sistemáticamente esas formas de aprendizaje dentro del contexto definido, es decir, un análisis situado del aprendizaje. El diseño de ambientes de aprendizaje en el aula es uno de los dos principales aspectos del investigación basada en el diseño, el segundo se refiere al análisis del aprendizaje matemático situado dentro del contexto social del aula, por lo tanto, la investigación basada en el diseño debe contemplar los siguientes criterios (Cobb, 2003; p.11):

1. Los resultados de los análisis deben alimentar de nuevo a mejorar los diseños de instrucción.
2. La metodología debe permitir la documentación del aprendizaje matemático colectivo de la comunidad de la clase durante los largos períodos de tiempo abarcados por los experimentos de diseño.
3. El análisis debe permitir la documentación del desarrollo individual del razonamiento matemático de los estudiantes a medida que participan en procesos comunales dentro del salón.

Bajo estas premisas, se propone un ciclo que caracteriza la investigación basada en el diseño (Brown, 1992; Cobb et al., 2001; Collins, 1999, en Stephan, 2003) (Ver figura 2), que en síntesis corresponde a un proceso iterativo que comprende el diseño de secuencias de instrucción, la experimentación y revisión de las mismas en el contexto del aula y, con base en lo anterior, se analiza el aprendizaje de la clase para que el ciclo de diseño, revisión y aplicación reinicie nuevamente (Gravenmeijer, Bowers y Stephan, 2003).

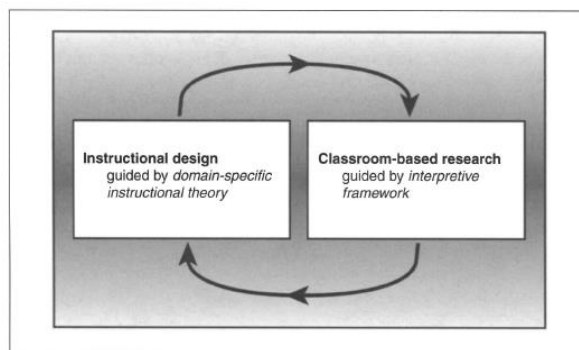


Figura 2. Fases en el ciclo de diseño.

Como puede observarse en esta perspectiva, se enfatiza la idea de aprendizaje situado, es decir, el aprendizaje de la comunidad dentro del aula y no únicamente el aprendizaje individual. Por tanto, se propone un análisis de los procesos individuales y sociales dentro del salón de clases al experimentar diseños. Cobb y Yackel (1996, en Stephan, 2003) desarrollaron un marco interpretativo para analizar ambos procesos descritos (Ver figura 3).

| Social Perspective               | Individual Perspective   |
|----------------------------------|--|
| Classroom social norms           | Beliefs about own role, others' roles, and the general nature of mathematical activity in school |
| Sociomathematical norms          | Mathematical beliefs and values  |
| Classroom mathematical practices | Mathematical conceptions   |

Figura 3. Un marco interpretativo para analizar el aula de clases

Complementariamente, una de las nociones centrales de la investigación basada en el diseño es la de *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* que se acuñó a partir del trabajo de Martin Simon a finales de los noventa, el cual describió como sigue (Gómez y Lupiáñez, 2007):

Una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes (Simón, 1995; p.133).

De esta manera, la THA constituye el momento inicial y parte fundamental del ciclo de la investigación basada en el diseño, pues presenta los elementos metodológicos para la instrucción. Según Gravenmeijer, Bowers y Stephan (2003), una THA aborda cuatro consideraciones específicas que la distingue de un proceso tradicional del diseño de la instrucción, las cuales se relacionan con el énfasis respecto a la naturaleza socialmente situada de la misma, el punto de vista de la planificación como un ciclo iterativo, el enfoque en las construcciones de los estudiantes en lugar de contenido matemático y, la posibilidad de ofrecer al profesor una teoría fundamentada que describe cómo un cierto conjunto de actividades de instrucción podría desarrollarse en un entorno social determinado (el aula de clase).

Las ideas descritas en este apartado con respecto a la investigación basada en el diseño solo corresponden a un primer acercamiento sobre este tópico, pues aún nos encontramos en la revisión de otras metodologías que fundamenten tanto la construcción de diseños de intervención, así como lo relativo a sus puestas en escena. Por ejemplo, dentro de esta revisión también analizaremos la ingeniería didáctica, caracterizada por una perspectiva sistémica para la construcción de diseños de intervención, ampliamente utilizada y retomada en trabajos socioepistemológicos por tal característica. Con esta revisión, pretendemos contar con elementos para tomar decisiones sobre qué tipo de metodología sería la más apropiada para nuestros objetivos.

### **Reflexiones finales**

En términos generales, queremos resaltar la importancia de este tipo de estudios que pretendan “tender puentes” entre la investigación y los proyectos educativos, pues es a través de la evidencia empírica, el medio por el cual el quehacer educativo puede construir argumentos objetivos sobre prácticas que son o no favorables para propiciar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. En este sentido, contar con elementos que permitan justificar y sistematizar los procesos educativos creemos que beneficiarían sensiblemente al sistema.

Un aspecto importante a discutir es la pertinencia de considerar al PyLVar como una competencia, tal y como lo propone Cabrera (2009), puesto algunas implicaciones de este hecho serían cuestionarse sobre ¿qué pasaría con el PyLVar si el enfoque educativo cambia? Dicho en otros términos ¿el PyLVar está subordinado a un enfoque educativo? Nuestra postura al momento considera que, por el contrario, el PyLVar en sus dos estatus, como línea de investigación y como forma de pensamiento es y será siempre un marco de referencia que permitirá dar sentido a la praxis educativa para alcanzar sus objetivos, independientemente de un enfoque educativo. Por lo tanto, creemos conveniente discutir este aspecto.

Asimismo, como se mostró en el apartado de la investigación basada en el diseño consideramos importante el construir marcos metodológicos más robustos que permitan hacer explícito el rol del diseño tanto desde su concepción y validación interna como de lo que provoca en su puesta en escena. Con esto esperamos generar conjeturas con respecto a las consideraciones relativas respecto a la construcción de diseños de intervención basados en el PyLVar que nos permitan proponer elementos para la organización de la intervención en las aulas y así, cumplir con el discurso del enfoque por competencias del bachillerato en Matemáticas.

### **Referencias**

- Aparicio, E. (2003). *Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica*. Tesis de Maestría no publicada. México: Cinvestav.
- Buendía, G. (2011). *La construcción social del conocimiento matemático escolar. Un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones*. México: Díaz de Santos.

- Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, México:Cinvestav.
- Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado. México:Cinvestav.
- Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, México:Cinvestav.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada Socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, pp. 1-9.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.
- Chimal, R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación*. (Tesis inédita de maestría). México:Cinvestav.
- Cobb, P. (2003). SupportingStudents' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in SocialContext. *Journal for Research in Mathematics Education. Monography*. 12, 1-16.
- Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 8(2), 145-168.
- Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. Guerrero, *Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada, México:Cinvestav.
- Gómez, P. y Lupiáñez, J. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), p79-98.
- González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Un estudio de resignificación de las situaciones didácticas*. México:Cinvestav.
- Gravenmeijer, K., Stephan, M. y Bowers, J. (2003). SupportingStudents' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in SocialContext. *Journal for Research in Mathematics Education. Monography*. 12, 51-66.
- Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: Una exploración de las relaciones  $f \leftrightarrow f'$  en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas*. Tesis de Doctorado. México:Cinvestav.
- Muñoz, G. (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 13(4-II), 283-302.
- Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar*. (Tesis Doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.



- Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al Cálculo*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- Secretaría de Educación Pública (SEP) (2008). Reforma Integral de la Educación Media Superior: La creación de un sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad (Documento de trabajo). Recuperado el día 8 de junio del 2015 del sitio Web de la Dirección General de Bachillerato: <http://www.dgb.sep.gob.mx/>
- Stephan, M. (2003). Supporting Students' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in Social Context. *Journal for Research in Mathematics Education. Monography*. 12, 17-35.
- Testa, Z. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar Uruguayo*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Unidad Legaria. México, D.F.
- Watson, A y Ohtani M. (2015). *Task Design In Mathematics Education an ICMI study 22*. Alemania: Springer.

### **Autores**

Luis López Acosta; CINVESTAV, IPN. México; [lalopeza@cinvestav.mx](mailto:lalopeza@cinvestav.mx)

Ricardo Cantoral Uriza; CINVESTAV, IPN. México; [rcantor@cinvestav.mx](mailto:rcantor@cinvestav.mx)

Gisela Montiel Espinoza; CINVESTAV, IPN. México; [gmontiele@cinvestav.mx](mailto:gmontiele@cinvestav.mx)